Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien.

Af J. Nielsen.

Lad $a_1, a_2, \cdots, a_n$ være et System af n Ting, som vi vil kalde »Frembringere«. Med a_i skal ogsaa dens »Reciprok«, a_i^{-1}, antages at være givet. Ved »Element« skal forstaas et «Produkt« af disse n Frembringere og deres Reciproker, $\Pi\,(a_i^{\pm 1})$, hvor det dog ikke skal være tilladt at ombytte »Faktorerne«; Elementet $a_4 a_1^{-1} a_7^3 a_1 a_4^{-2}$ er saaledes forskelligt fra $a_4 a_1^{-1} a_4^{-2} a_1 a_7^3$. En Frembringer skal kunne bortforkortes mod sin Reciprok, naar de staar umiddelbart ved Siden af hinanden i et Produkt: $a_2^3 a_5^2 a_5^{-3} = a_2^3 a_5^{-1}$. Bortforkortes paa denne Maade alle Faktorer i et Produkt, skrives det 1; f. Eks. $a_i a_i^{-1} = a_i^{-1} a_i = 1$. Er e et vilkaarligt Element, skal dets »Reciprok« e^{-1} defineres saaledes, at $ee^{-1} = e^{-1}e = 1$; Frembringerne i e^{-1} faas altsaa ved, at man læser dem bagfra i e og tager dem med modsat Exponentfortegn. Eksempel:

$$e = a_4 a_5^{-2} a_3^3 a_4^{-1}; \qquad e^{-1} = a_4 a_3^{-3} a_5^2 a_4^{-1}.$$

§ 1. Reduktion af et givet Elementsystem.

Lad nu $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ være m vilkaarlige Elementer. Vi kan antage, at de er skrevne i uforkortelig Form. Lad endvidere β være et hvilketsomhelst Element. Vi siger, at Systemet $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ »frembringer« Elementet β, hvis der findes et saadant Produkt $\Pi\,(\alpha_i^{\pm 1})$, at det, eventuelt ved Forkortning, viser sig at være lig med β. Er saaledes givet $\alpha_1 = a_1 a_2 a_1^{-2}$, $\alpha_2 = a_2^{-1} a_1^{-2}$ og $\beta = a_1 a_2^2 a_1 a_2^2$, ses β at være lig med $\alpha_1 \alpha_2^{-1} \alpha_1 \alpha_2^{-1}$. Et Elementsystem siges at frembringe et andet, naar det frembringer ethvert Element i dette. To Systemer, som frembringer hinanden gensidig, siges at være »ækvivalente«, eller at høre til samme »Klasse«.

Vi vil betegne Systemet $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ med S, Systemet $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots, \alpha_m^{-1}$ med S^{-1} og Systemet $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_1^{-1}, \cdots, \alpha_m^{-1}$ med $S + S^{-1}$. Med $g(\alpha_1)$ vil vi betegne Antallet af Frembringere i α_1, d. v. s. Summen af de numeriske Værdier af alle i α_1 forekommende Eksponenter. $g(\alpha_1) = g(\alpha_1^{-1})$. Endvidere betegnes $\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = g(S)$. Vi vil nu søge at erstatte S med et System S', der er ækvivalent med S og for hvilket $g(S') < g(S)$. Indekstallene i S tænkes fordelt saaledes, at $g(\alpha_1) \leqq g(\alpha_2) \leqq \cdots \leqq g(\alpha_m)$; et Systems Frembringelsesevne er jo uafhængig af Ordenen indenfor Systemet. Nu søger vi at opnaa en Formindskelse af g-Tallene ved at multiplicere Elementerne to og to. Vi danner altsaa Elementerne $\alpha_i\alpha_k$, $\alpha_i^{-1}\alpha_k$, $\alpha_k\alpha_i$, $\alpha_k\alpha^{-1}$ for $i = 1, 2, \cdots m - 1$ og $k > i$ og vil opnaa den ønskede Formindskelse, hvis mere end Halvdelen af α_i kan bortforkortes i et saadant Produkt. Er f. Eks. $g(\alpha_i\alpha_k) < g(\alpha_k)$, da definerer vi et nyt System S' ved: $\alpha'_\rho = \alpha_\rho$ for $\rho \neq k$ og $\alpha'_k = \alpha_i\alpha_k$. S frembringer altsaa S'. Men da $\alpha_\rho = \alpha'_\rho$ for $\rho \neq k$ og $\alpha_k = \alpha_i'^{-1}\alpha'_k$, frembringer S' ogsaa S; og $g(S') < g(S)$. Er $\alpha'_k = 1$, bortkastes det. De Kombinationer, man vilde faa ved at medtage Tilfældet $k = i$, er ubrugelige til en saadan ækvivalent Ændring af Systemet; man vilde iøvrigt altid have $g(\alpha_i^2) > g(\alpha_i)$ for $\alpha_i \neq 1$. Den samme Fremgangsmaade anvendes i de Tilfælde, hvor $\alpha_i^{-1}\alpha_k$ eller $\alpha_k\alpha_i$ eller $\alpha_k\alpha_i^{-1}$ opviser den ønskede Formindskelse. Elementerne i S' ordnes nu paany efter g-Tal; derefter erstattes S' paa samme Maade med et ækvivalent System S'', hvor $g(S'') < g(S')$, o. s. fr. Den derved fundne Række af Systemer er endelig, da g-Tallet jo stadig aftager. Lad $S^{(p)}$ være det sidste i Rækken, saa $g(S^{(p)})$ ikke kan formindskes yderligere ved den nævnte Fremgangsmaade. Der findes altsaa ikke 2 Elementer med forskellig Indeks i $S^{(p)} + S^{(p)-1}$ saaledes, at mere end Halvdelen af det ene kan bortforkortes i et af deres to Produkter. Vi forsøger da at danne saadanne Produkter af 3 Elementer, at det midterste bortforkortes helt mellem de to andre; dette er kun muligt ved, at det midterste Element har lige g-Tal og at en Halvdel bortforkortes til hver Side. Lad α_{h_1} være det første Element i Systemet, der har denne Egenskab, at kunne bortforkortes helt mellem to andre, og lad E_1 og E_2 være dets to »Halvender«, saaledes at $\alpha_{h_1} = E_1E_2$ og $g(E_1) = g(E_2) = \frac{1}{2}g(\alpha_{h_1})$. Vi vil da bevirke, at α_{h_1} taber denne Egenskab, ved at foretage saadanne ækvivalente Ændringer af Systemet, at E_2 erstattes med E_1^{-1} overalt, hvor E_2 optræder som »Ende« i Systemet, undtagen i α_{h_1} selv. Er altsaa $\alpha_k = E_kE_2$, $(k \neq h_1)$, erstatter vi det med $\alpha'_k = \alpha_k\alpha_{h_1}^{-1} = E_kE_1^{-1}$; og er $\alpha_l = E_2^{-1}E_l$, erstatter vi det med $\alpha'_l = \alpha_{h_1}\alpha_l = E_1E_l$. Det er klart, at kun saadanne Elementer α_k, α_l, $\cdots$ kan komme i Betragtning ved disse ækvivalente Ændringer, hvis g-Tal er $\geqq g(\alpha_{h_1})$, da jo ellers mere end Halvdelen af dem vilde bortforkortes i disse Produkter. Da deres g-Tal ikke ændres ved disse ækvivalente Ændringer, kan vi beholde den gamle Orden i Systemet. Intet af Systemets Elementer begynder nu med E_2^{-1}, og intet uden α_{h_1} ender med E_2; vi vil derfor kalde E_2 en »isoleret Ende« i Systemet. Intet af de Elementer, der eventuelt gaar forud for α_{h_1} i Systemordenen, kan ved disse ækvivalente Ændringer, som vi for Øjeblikket kan kalde α_{h_1}-Ændringerne, have erhvervet den Egenskab, at kunne bortforkortes mellem to andre af Systemets Elementer med en Halvdel til hver Side; thi enten det selv har været underkastet en α_{h_1}-Ændring eller ej, vil dets Halvender have et g-Tal $\leqq g(E_1)$; de Elementender, der i det Hele taget ved α_{h_1}-Ændringerne har faaet en ny Skikkelse, begynder med E_1 eller ender med E_1^{-1}; men Enden E_1 forefandtes allerede **før** α_{h_1}-Ændringerne i Systemet, f. Eks. i α_{h_1}; og har vedkommende Element selv været underkastet en α_{h_1}-Ændring, da har det før denne haft en Halvende E_2; men ogsaa denne forefandtes før α_{h_1}-Ændringerne andetsteds i Systemet, f. Eks. i α_{h_1}. — Muligvis har disse α_{h_1}-Ændringer ført til, at der i det nye System findes et Element (eller flere), af hvilket mere end Halvdelen kan bortforkortes i Produktet med et andet Element. Da vil vi atter anvende den første Fremgangsmaade, ved hvilken vi opnaar en Formindskelse af Systemets g-Tal. Hvis dette ikke er Tilfældet, bestemmer vi det næste Element α_{h_2} i Rækken, $(h_2 > h_1)$, der har den Egenskab, at kunne bortforkortes mellem to andre — hvis et saadant overhovedet findes —, og foretager ved Hjælp af dette de α_{h_2}-Ændringer i Systemet, der svarer til de før beskrevne α_{h_1}-Ændringer. Derefter undersøges paany, om den første Fremgangsmaade kan finde Anvendelse o. s. fr. Ved at fortsætte med at skifte mellem de to Fremgangsmaader, saaledes at man stadig foretrækker den første, hvor der er Mulighed for den, føres man til en Række ækvivalente Ændringer af Systemet S, der indeholder Ændringer af første Art, ved hvilke Systemets g-Tal formindskes, og som derfor kun kan være i endeligt Antal, og Ændringer af anden Art, ved hvilke Systemets g-Tal ikke forandres; en Følge af disse sidste, som altsaa staar imellem 2 Ændringer af første Art eller Rækkens Ender, bestaar af et begrænset Antal af α_{h_1}-Ændringer, dernæst et begrænset Antal af α_{h_2}-Ændringer, med $h_2 > h_1$, o. s. v.

med stedse voksende Indekstal h_i; Følgen er altsaa ligeledes endelig. Til Slut maa man altsaa naa til et System S^*, der hverken giver Plads for den ene eller den anden Fremgangsmaade mere. S^* skal kaldes et »reduceret System til S«. S^* er ækvivalent med S. Dets Elementtal er mindre eller lig med Elementtallet i S. Endvidere er $g(S^*) \leqq g(S)$. Dets karakteristiske Egenskab er: I intetsomhelst Produkt af 2 Elementer kan mere end Halvdelen af det ene bortforkortes; i intetsomhelst Produkt af 3 Elementer kan det midterste bortforkortes helt mellem de to andre. (Herved ses naturligvis bort fra det Tilfælde, at et Element staar sammen med sin Reciprok). Eller udførligere: Et Produkt E i Frembringerne kaldes en »isoleret venstre (henholdsvis højre) Ende« i et System S, naar eet og kun eet af Elementerne i $S + S^{-1}$ begynder med E (henholdsvis ender med E). For et reduceret System gælder da: Enhver Elementende, der omfatter mere end Halvdelen af Elementets Frembringere, er isoleret; af de to Halvender i et Element med lige g-Tal er mindst een isoleret.

Eksempel.

Lad det givne System S være

$$\alpha_1 = a_4 a_2 a_1^{-1} a_3; \quad \alpha_2 = a_1^2 a_2^{-2} a_4^{-1}; \quad \alpha_3 = (a_2^{-1} a_1^{-1} a_3)^2;$$
$$\alpha_4 = a_4 a_2^2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_3.$$

Vi vil underkaste dette System Reduktionsprocessen og betegne den gennemløbne Systemrække med $S^{(1)}, S^{(2)}, \cdots$, idet vi dog kun nedskriver det Element, der forandres ved den paagældende ækvivalente Ændring, og tænker os de andre nedskrevne uforandrede, samt i dette simple Eksempel undlader at ordne Elementerne efter g-Tal hver Gang.

$$\alpha_4^{(1)} = \alpha_2 \alpha_4 = a_1 a_2^{-1} a_1^{-1} a_3$$
$$\alpha_3^{(2)} = \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(1)-1} = a_2^{-1} a_1^{-1} a_3 a_1^{-1}.$$

Vi har derved to Gange opnaaet Formindskelse af Systemets g-Tal, men dette er nu ikke mere muligt foreløbig. De nu foreliggende 4 Elementer: $\alpha_1^{(2)} = \alpha_1$, $\alpha_2^{(2)} = \alpha_2$, $\alpha_3^{(2)}$ og $\alpha_4^{(2)} = \alpha_4^{(1)}$ tillader ikke mere, at danne et Produkt af to Faktorer, der har mindre g-Tal, end en af Faktorerne. Vi vil derfor se os om efter et Element, som kan bortforkortes helt mellem to andre. Denne Mulighed foreligger her paa een Maade, idet

$\alpha_1^{(2)}$ bortforkortes helt i $\alpha_2^{(2)}\alpha_1^{(2)}\alpha_4^{(2)-1}$. Vi vil altsaa sørge for, at f. Eks. den højre Halvende af $\alpha_1^{(2)}$ bliver en isoleret Ende i Systemet. Dertil kræves der her kun een ækvivalent Ændring, nemlig:

$$\alpha_4^{(3)} = \alpha_4^{(2)}\alpha_1^{(2)-1} = a_1 a_2^{-2} a_4^{-1}.$$

Nu kan vi igen fortsætte efter den første Fremgangsmaade med Formindskelse af g-Tallet:

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{(4)} &= \alpha_2^{(3)}\alpha_4^{(3)-1} = a_1,\\
\alpha_4^{(5)} &= \alpha_2^{(4)-1}\alpha_4^{(4)} = a_2^{-2}a_4^{-1}.\\
\alpha_3^{(6)} &= \alpha_3^{(5)}\alpha_2^{(5)} = a_2^{-1}a_1^{-1}a_3,\\
\alpha_1^{(7)} &= \alpha_1^{(6)}\alpha_3^{(6)-1} = a_4 a_2^2,\\
\alpha_4^{(8)} &= \alpha_4^{(7)}\alpha_1^{(7)} = 1 \text{ og bortkastes altsaa.}
\end{aligned}$$

De tre Elementer $\alpha_1^{(8)}$, $\alpha_2^{(8)}$ og $\alpha_3^{(8)}$, der bliver tilbage, tillader nu ingen Ændringer mere, hverken efter den første eller anden Fremgangsmaade, danner altsaa et reduceret System S^* til S. Idet vi ordner Elementerne efter g-Tal og giver dem nye Navne, har vi:

$$\alpha_1^* = a_1\,(= \alpha_2^{(8)});\quad \alpha_2^* = a_2^{-1}a_1^{-1}a_3\,(= \alpha_3^{(8)});\quad \alpha_3^* = a_4 a_2^2\,(= \alpha_1^{(8)}).$$

Vi vil nedskrive de Ligninger, der viser Systemernes Ækvivalens. Som S^*'s Frembringelse ved S faas ved at følge Reduktionsprocessens Forløb:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1^* = \alpha_2\alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_2^{-1};\quad \alpha_2^* = \alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_1\alpha_4^{-1}\alpha_2^{-1};\\
\alpha_3^* = \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_1^{-1}\alpha_4\alpha_3^{-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Denne Frembringelse er imidlertidig ikke entydig; f. Eks. kunde man erstatte den anden Ligning med $\alpha_2^* = \alpha_2\alpha_4\alpha_1^{-1}\alpha_4$. Som S's Frembringelse ved S^* faas (f. Eks. ved at gennemløbe Reduktionsprocessen den modsatte Vej):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 = \alpha_3^*\alpha_2^*;\quad \alpha_2 = \alpha_1^{*2}\alpha_3^{*-1};\quad \alpha_3 = \alpha_2^{*2};\\
\alpha_4 = \alpha_3^*\alpha_1^{*-1}\alpha_2^*.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Denne Frembringelse er entydig, som det skal vises i § 2. At Ligningerne (1) er et Opløsningssystem til (2) med Hensyn til α^*-erne fremgaar rent formelt, d. v. s. uden at man tager Hensyn til α-ernes Betydning som Produkter i de oprindelige Frembringere a_i. Medens (2) kun indses at være et Opløsningssystem til (1), naar man indsætter α-ernes Udtryk i a-erne.

§ 2. Uafhængigt Elementsystem.

Lad $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ være r givne Elementer i Frembringerne $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $\Gamma = \Pi(\gamma_i^{\pm 1})$ et vilkaarligt Produkt af disse. Viser Γ sig ved Forkortning i Frembringerne a_i at være lig med 1, siges $\Gamma = 1$ at være en »i Frembringerne a_i identisk Relation mellem $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$«. Denne siges at være »triviel« eller »uvæsentlig«, naar den ogsaa er »identisk i Elementerne γ_i«, d. v. s. naar et $\gamma_\varkappa$ staar umiddelbart sammen med $\gamma_\varkappa^{-1}$, altsaa kan bortforkortes som Helhed, og dette kan fortsættes indtil man har bortforkortet alle γ-erne i Γ. Eksisterer der ingen væsentlig Relation mellem $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$, siges de at være »indbyrdes uafhængige« eller at danne et »uafhængigt System«. Frembringerne $a_1, a_2, \cdots, a_n$ selv danner et Eksempel paa et saadant, idet de jo antages at være indbyrdes forskellige. Som Eksempel paa et afhængigt Elementsystem kan vi benytte de i § 1 forelagte Elementer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, idet vi let kan opstille væsentlige Relationer mellem disse, f. Eks. $(\alpha_2\alpha_4\alpha_1^{-1}\alpha_4)^2\alpha_3^{-1} = 1$. Erstatter vi heri S med S^* ved Hjælp af (2), bliver Relationen triviel, nemlig identisk i α^*-erne. Vi vil nu vise, at altid gælder:

S æ t n i n g 1: E t r e d u c e r e t S y s t e m e r u a f h æ n g i g t.

Bevis: Lad $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ være et reduceret System og $\Gamma = \Pi(\gamma_i^{\pm 1}) = 1$. Hvis alle Faktorer γ_i i Γ ved Forkortning mellem den forudgaaende og den efterfølgende Faktor gav en Rest, vilde Γ bestaa af alle disse Rester, mellem hvilke der ingen yderligere Forkortning kunde finde Sted i Modstrid med $\Gamma = 1$. Altsaa maa mindst een af Faktorerne bortforkortes helt mellem sine to Naboer. Men ifølge et reduceret Systems Egenskab kan det kun ske ved, at en af Naboerne er dens Reciprok. Deres Produkt kan altsaa bortkastes, og ved at fortsætte paa samme Maade ser man, at $\Gamma = 1$ er en triviel Relation. — En Relation mellem et reduceret Systems Elementer, der er en Identitet i Frembringerne, er altsaa ogsaa en Identitet i Systemets Elementer.

Vi vil nu bevise følgende Hjælpesætning:

H v i s $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ e r i n d b y r d e s u a f h æ n g i g e (afh æ n g i g e), d a e r o g s a a $\gamma_1\gamma_2, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ i n d b y r d e s u a f h æ n g i g e (a f h æ n g i g e).

Lad $S = \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ være et uafhængigt System. Vi sætter $S' = \gamma'_1, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_r$, hvor $\gamma'_1 = \gamma_1\gamma_2$, og $\gamma'_j = \gamma_j$ for

$j = 2, 3, \cdots, r$. Lad $\Gamma = \Pi(\gamma_i'^{\pm 1}) = 1$ være en gyldig Relation for S'. For at fremhæve γ_1' vil vi skrive den udførligt i følgende Form: $\Gamma = P_1 \gamma_1'^{\varepsilon_1} P_2 \gamma_1'^{\varepsilon_2} \cdots\cdots P_\rho \gamma_1'^{\varepsilon_\rho} P_{\rho+1}$, hvor alle $\varepsilon_i = \pm 1$ og alle P_i er Produkter af $\gamma_2', \cdots\cdots, \gamma_r'$ eller 1. Indfører vi S istedetfor S', faar vi:

$$\Gamma = P_1 (\gamma_1 \gamma_2)^{\varepsilon_1} P_2 (\gamma_1 \gamma_2)^{\varepsilon_2} \cdots\cdots P_\rho (\gamma_1 \gamma_2)^{\varepsilon_\rho} P_{\rho+1},$$

hvor hvert P_i kun indeholder $\gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_r$. Da $\Gamma = 1$ jo er en Identitet i γ-erne, skal de i Γ forekommende ρ Faktorer γ_1 bortforkortes indbyrdes; der vil altsaa paa mindst eet Sted i Γ findes to Faktorer γ_1 med modsat Eksponent, der skilles ved et Produkt i $\gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_r$, som bortforkortes identisk i $\gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_r$. Antager vi, at den første af disse Faktorer γ_1 f. Eks. har Eksponenten $\varepsilon_{\lambda-1} = +1$, faar vi:

$$\Gamma = \cdots\cdots \gamma_1 \gamma_2 P_\lambda \gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1} \cdots\cdots$$

hvor $\gamma_2 P_\lambda \gamma_2^{-1} = 1$ identisk i γ-erne, altsaa $P_\lambda = 1$ identisk i γ-erne, altsaa identisk i $\gamma_2', \gamma_3', \cdots\cdots, \gamma_r'$. Men da kan jo $\gamma_1'^{\varepsilon_{\lambda-1}} P_\lambda \gamma_1'^{\varepsilon_\lambda}$ bortforkortes identisk i γ'-erne. Og ved at fortsætte med samme Argumentation ser man, at $\Gamma = 1$ er en triviel Relation i γ'-erne. Disse er altsaa uafhængige. Den omvendte Sætning følger umiddelbart af Sætningen selv ved indirekte Bevis, idet man frembringer S ved S' ved at sætte $\gamma_1 = (\gamma_1 \gamma_2) \cdot \gamma_2^{-1}$. — Er S afhængigt og $\gamma_1 \gamma_2 = 1$ og bortkastes det, kan $\gamma_2, \gamma_3, \cdots, \gamma_r$ selvfølgelig være uafhængige. — Det er klart, at et System, der fremgaar af et afhængigt System ved Tilføjelse af et vilkaarligt Element, ogsaa vil være afhængigt.

Da et Systems Egenskab at være uafhængigt (afhængigt) ikke forstyrres ved, at man permuterer dets Elementer og skifter Fortegn i et vilkaarligt Antal, ses det umiddelbart, at hvis $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_r$ er indbyrdes uafhængige (afhængige), da vil ogsaa det System være uafhængigt (afhængigt), der fremkommer ved, at man erstatter γ_i med $(\gamma_i^{\pm 1} \gamma_k^{\pm 1})^{\pm 1}$ og lader alle andre Elementer uforandrede. Man vil altsaa, ved stadig at foretage den Slags ækvivalente Ændringer i et uafhængigt (afhængigt) System, faa en hel Række uafhængige (afhængige) Systemer, som er indbyrdes ækvivalente Specielt ses:

Sætning 2: Et Elementsystem, der har samme Elementantal, som et deraf afledet reduceret System, er uafhængigt.

Thi ved Reduktionsprocessen forekommer i dette Tilfælde kun de nysnævnte ækvivalente Ændringer; og det reducerede System er uafhængigt.

Sætning 3: Et Elementsystem, der har større Elementantal end et deraf afledet reduceret System, er afhængigt.

Thi i Reduktionsprocessens Løb skal mindst een Gang et Element kastes bort. Det forudgaaende System maa da være afhængigt; og alle Systemer, som gaar forud for dette, altsaa ogsaa det givne, maa da ligeledes være afhængige.

§ 3. **Frembringelsesproblemet.**

Lad der være givet et System S af m Elementer $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ og et Element $\beta \neq 1$. Vi vil søge en Metode til at afgøre, om S frembringer β eller ej. Ved Hjælp af den i § 1 angivne Metode konstruerer vi til S et reduceret System $S^* = \alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_p^*$, hvor jo $p \leqq m$. Da S^* er ækvivalent med S, har vi kun at afgøre, om S^* frembringer β. Dette er jo Tilfældet, hvis der eksisterer en Produktfremstilling $\beta = \Pi_1 (\alpha_i^{*\pm 1})$; eksisterer samtidig Produktfremstillingen $\beta = \Pi_2 (\alpha_i^{*\pm 1})$, saa er $\Pi_1 \Pi_2^{-1} = 1$ en Indentitet i Frembringerne a. Den vil da ifølge Sætning 1 ogsaa være en Identitet i Elementerne α^*, og begge Fremstillingerne vil altsaa være identiske, — idet vi kan antage dem skrevne uforkortelige i α^*-erne. Eksisterer der altsaa en Frembringelse af β ved S^*, saa er den ogsaa entydig. Faktorerne i dette Produkt efterlader ved Forkortelsen alle en Rest, og β er Samlingen af disse Rester. Lad α være den første Faktor; Resten, den efterlader i β, er mere end Halvdelen af α, eller nøjagtig Halvdelen og da en isoleret Halvdel. For at bestemme den første Faktor paa en hurtig og sikker Maade, kan vi opskrive hvad vi kan kalde S^*'s »venstre Storende-Samling«, idet vi med et Elements »venstre Storende« mener de første $r+1$ Frembringere i Elementet, naar dets g-Tal er $2r$ eller $2r+1$; den omtalte Samling skal da omfatte de $2p$ venstre Storender i $S^* + S^{*-1}$. Endvidere vil vi opskrive S^*'s »venstre Halvende-Samling«, i hvilken vi. optager enhver saadan venstre Halvende af et Element med lige g-Tal i $S^* + S^{*-1}$, hvis komplementære Halvende ikke er isoleret, altsaa forekommer mindst paa to Steder i S^*. Hvis vi nu antager, at β frembringes ved S^*, da skal et af to Tilfælde indtræde: Enten vil β begynde med een (og kun een) Storende af den første Samling, f. Eks. med venstre Storende i $\alpha_k^{*\varepsilon}$. Da vil Opgaven at frembringe β være ført tilbage til den Opgave at frembringe $\bar{\beta} = \alpha_k^{*-\varepsilon}\beta$, hvor $g(\bar{\beta}) < g(\beta)$. Eller β vil ikke begynde med en saadan Storende, men derimod med en saadan venstre Halvende, som forefindes i den anden Samling, f. Eks. med venstre Halvende i $\alpha_l^{*\eta}$. Opgaven vil da være ført tilbage til den Opgave at frembringe $\bar{\beta} = \alpha_l^{*-\eta}\beta$. Dette vil ogsaa være en Reduktion af Problemet. Thi rigtignok er $g(\bar{\beta}) = g(\beta)$, men $\bar{\beta}$ vil, hvis det ikke begynder med en Storende af første Samling, kun kunne begynde med saadan Halvende af anden Samling, hvis g-Tal er $> \frac{1}{2} g(\alpha_l^*)$. Ved at fortsætte med saadanne Reduktioner kan man altsaa muligvis nok faa en Række Elementer $\bar{\beta}$, $\bar{\bar{\beta}}, \cdots$, der alle har samme g-Tal som β, men dog kun en endelig Række, nemlig i hvert Fald ikke flere, end der findes Halvender i anden Samling. Det er derfor klart, at Frembringelsesproblemet ved Konstruktionen af de to ovennævnte Samlinger kan løses i et endeligt Antal Skridt. Man faar en endelig Række Elementer $\beta, \bar{\beta}, \bar{\bar{\beta}}, \cdots, \overset{(q)}{\beta}$, saaledes at hvert Element i Rækken paa entydig Maade bestemmes ved det forudgaaende og de to Samlinger. β frembringes ved S^*, naar $\overset{(q)}{\beta} = 1$ og kun i dette Tilfælde. Med andre Ord: Vi kommer enten i denne Proces engang til et Element $\overset{(q)}{\beta}$, der ikke mere begynder med en Frembringerfølge, der findes i en af de to Samlinger, og da frembringer S^* ikke β, eller vi faar β opløst i sine Faktorer i S^*. — Fra Frembringelsen af β ved S^* kan vi bagefter naturligvis uden Vanskelighed finde dets Frembringelse ved S. Vi kan sige, at β's Frembringelse ved S, hvis den er mulig, bliver evident, ved at vi erstatter S med S^*.

Eksempel.

Lad S være det i § 1 benyttede System $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Af det der konstruerede reducerede System S^* finder vi følgende venstre Storendesamling:

$$a_1,\ a_2^{-1}a_1^{-1},\ a_4a_2,\ a_1^{-1},\ a_3^{-1}a_1,\ a_2^{-2}$$

og ingen Halvendesamling. Lad β være

$$a_1a_4a_2a_1^{-1}a_3a_1^{-1}a_3^{-1}a_1a_2^{-1}a_4^{-1}.$$

Eksemplet er valgt saaledes, at S frembringer β. Selv om man vidste dette paa Forhaand, vilde det endogsaa i dette simple og paa ingen Maade kunstigt valgte Tilfælde være overordentlig møjsommeligt at prøve sig frem til en Fremstilling af β ved S. Men ved Hjælp af Storendesamlingen aflæser man Fremstillingen ved S^* umiddelbart. β begynder med a_1, $\bar{\beta} = \alpha_1^{*-1}\beta$ begynder med $a_4 a_2$, som er Storende i α_3^*. $\bar{\bar{\beta}} = \alpha_3^{*-1}\bar{\beta} = a_2^{-1} a_1^{-1} a_3 a_1^{-1} a_3^{-1} a_1 a_2^{-1} a_4^{-1}$ begynder med $a_2^{-1} a_1^{-1}$ o. s. f. Man finder saaledes at

$$\beta = \alpha_1^* \alpha_3^* \alpha_2^* \alpha_1^{*-1}, \alpha_2^{*-1} \alpha_3^{*-1},$$

og kan dernæst ved Hjælp af Ligningerne (1) nedskrive β's Fremstilling i S, eller rettere sagt: en af β's Fremstillinger i S, da Ligningerne (1) jo ikke er entydig bestemte.

§ 4. Anvendelse i Gruppeteorien. Isomorfi.

Samlingen af alle ved $a_1, a_2, \cdots, a_n$ frembragte Elementer ses at have følgende Egenskaber: 1) To hvilkesomhelst givne Elementer e_1 og e_2 bestemmer »ved Komposition« (Multiplikation) et nyt Element af Samlingen: $e_1 e_2$, og denne Multiplikation er associativ, d. v. s. $(e_1 e_2) \cdot e_3 = e_1 \cdot (e_2 \cdot e_3)$; (Kompositionsregel og Associativitet). 2) Der eksisterer eet Element i Samlingen, som ved Komposition med et hvilketsomhelst Element ikke forandrer dette (Enhedselement, 1). 3) Til hvert Element e eksisterer der eet Element — vi betegner det med e^{-1} — som tilfredsstiller Ligningerne $ee^{-1} = e^{-1}e = 1$ (Reciprok). — En Samling af Ting, som opfylder disse 3 Betingelser, siges som bekendt at danne en Gruppe. I vort Tilfælde vil vi betegne denne med den ved Frembringerne $a_1, \cdots, a_n$ frembragte »frie Gruppe G_n« og skrive den $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$. Samlingen af de Elementer, der frembringes ved et Elementsystem $S = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, opfylder ligeledes de nævnte 3 Betingelser. Den Gruppe $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$, de danner, er en Undergruppe af G_n, da alle dens Elementer jo er Elementer af G_n. — (Det skal dog paa Forhaand siges, at man ikke kan vente at faa alle Undergrupper af G_n ad denne Vej, da en Samling af Elementer af G_n, der opfylder Gruppebetingelserne, ikke altid kan frembringes ved et endeligt Elementsystem[1]). — Med Hensyn til Gruppen $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$

[1]) Smlg. M. Dehn: Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. Math. Anm. 71 S. 118.

bruger vi ogsaa Betegnelsen »Frembringere« for $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. Dette Frembringersystem er ingenlunde bestemt ved Gruppen; vi kan altid erstatte det med et ækvivalent System. Alle Systemer af samme Klasse bestemmer altsaa den samme Undergruppe af Elementer i G_n.

Her skal lægges Mærke til en Forskel i Gruppeelementernes Identificering i de forskellige Tilfælde. I G_n betegner to i a-erne uforkortelige, fra hinanden forskellige Produkter i a-erne altid to forskellige Elementer. Det er derfor, G_n skal kaldes en fri Gruppe. I $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$ kan to i α-erne uforkortelige, fra hinanden forskellige Produkter i α-erne bestemme det samme Element, nemlig naar de viser sig at være identiske, saa snart man for α-erne skriver disses Udtryk i a-erne. Dog kan man jo altid erstatte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ med et reduceret System $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_p^*$, og to forskellige Produkter i disse vil da altid fremstille forskellige Gruppeelementer, da α^*-erne jo ifølge Sætning 1 er uafhængige. Gruppen $[\alpha_1, \cdots, \alpha_m]$ fremstilles altsaa i Formen $[\alpha_1^*, \cdots, \alpha_p^*]$ som fri Gruppe, og saaledes kan altsaa alle ved et endeligt Elementsystem bestemte Undergrupper af G_n fremstilles.

Det vil nu være af særlig Betydning at vide, om Gruppen $[\alpha_1, \cdots, \alpha_m]$ omfatter alle G_n's Elementer, altsaa falder sammen med G_n. I dette Tilfælde kalder vi $S = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ et »Primitivsystem«. Nødvendig og tilstrækkelig Betingelse derfor vil være, at S frembringer $a_1, a_2, \cdots, a_n$; men dette er det samme som, at et reduceret System $S^* = \alpha_1^*, \cdots, \alpha_p^*$ til S frembringer $a_1, \cdots, a_n$, og dette vil ifølge Frembringelsesproblemets Løsning kun ske, naar hvert a_i forefindes blandt α^*-erne enten med Eksponent $+1$ eller -1. S^* kan saa ikke indeholde flere Elementer, da det ellers ikke vilde være uafhængigt. Betingelsen er altsaa, at S^* er en Permutation af de med Eksponenter $+1$ eller -1 forsynede oprindelige Frembringere $a_1, \cdots, a_n$. Vi vil altsaa have: $p = n$ og $m \geqq n$.

Lad os betragte det Tilfælde, at $m = n$, at der altsaa ikke bortkastes noget Element af S ved Reduktionsprocessen. I dette Tilfælde er Systemet S ifølge Sætning 2 uafhængigt. Man kan altsaa udtrykke Forholdet mellem S og det oprindelige Frembringersystem $A = a_1, \cdots, a_n$ saaledes: 1) S frembringer A, og A frembringer S. 2) A og S har lige mange Elementer. 3) Parrer man paa enentydig Maade Elementerne i S med dem i A, da vil enhver gyldig Relation i A frem-kalde en gyldig Relation i S ved, at man erstatter ethvert a med det tilsvarende α; og omvendt. (Simpelthen fordi Relationerne jo i begge Tilfælde skal være Identiteter). En saadan Sammenordning af de oprindelige Frembringere med de n Elementer $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ i bestemt Rækkefølge kalder man en »isomorf Transformation« eller »Autoisomorfi« for Gruppen G_n. Gruppen »afbildes« paa sig selv. For at et Elementsystem skal bestemme en saadan Autoisomorfi for G_n, skal det altsaa være et uafhængigt Primitivsystem, altsaa have n Elementer og frembringe A. — Man kan uden større Vanskeligheder gøre Rede for saadanne uafhængige Primitivsystemers Egenskaber, der frembyder en særlig Interesse i den frie Gruppe G_2 med kun 2 Frembringere[1]). Vil man efterspore Gruppens dybere liggende Egenskaber, da maa man berøve Systemet A dets Særstilling, da det jo paa ingen Maade udmærker sig overfor andre uafhængige Primitivsystemer. Det, der interesserer ved en Gruppe, er dens »indre« Egenskaber, der ikke er afhængige af Gruppens tilfældige Fremstilling, men invariante overfor isomorf Transformation.

Her skal endnu kun nævnes een Egenskab af saadan et uafhængigt Primitivsystem $S = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$. I α_i vil Frembringeren a_k i Almindelighed forekomme flere Gange og med baade positive og negative Eksponenter. Vi vil betegne den algebraiske Sum af a_k's Eksponenter i α_i med d_{ik} og danne et kvadratisk Talskema (en »Matriks«) af disse n^2 Tal d_{ik}. Denne Matriks ses for Systemet A selv at være »Enhedsmatriks«:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}$$

Dens Determinant er altsaa i dette Tilfælde $|d_{ik}| = +1$. Vi kan nu gaa over fra A til S ved en Række af følgende Operationer: 1) Skifte Fortegn i et enkelt Element; det betyder i Matriks: Skifte Fortegn i en af Matriks' Rækker. 2) Permutere Elementerne: permutere Matriks' Rækker. 3) Erstatte

[1]) Smlg. J. Nielsen: »Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit 2 Erzeugenden«, Math. Ann. 78, og »über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation«, Math. Ann. 79.

α_i med $\alpha_i \alpha_k^{\pm 1}$: Addere k-te Række i Matriks med Faktor $\pm$ 1 til i-te Række. — Matriks kan derved antage en indviklet Skikkelse, men dens Determinant vil stadig være $\pm$ 1. Nødvendig Betingelse for en isomorf Transformation er altsaa, at Transformationsdeterminanten $|d_{ik}|$ er lig $\pm$ 1; men denne Betingelse er selvfølgelig ikke tilstrækkelig.

Man ser jo her Forbindelsen med de sædvanlige lineære Ligninger. Vi gik ud fra Systemet af n Ligninger:

$$\alpha_i = \Pi^{(i)}(a_j^{\pm 1}) \tag{3}$$

og definerede det før nævnte Talskema d_{ik}.

Lad os samtidig nedskrive de n Ligninger, der fremstiller a-erne som Produkt af α-erne:

$$a_i = \psi^{(i)}(\alpha_k^{\pm 1}) \tag{4}$$

og betegne den algebraiske Sum af α_k's Eksponenter i a_i med δ_{ik}. Indsætter vi (3) i (4), faar vi de n Ligninger

$$a_i = \psi^{(i)}(\Pi^{(k)}(a_j^{\pm 1})^{\pm 1}),$$

der jo skal være Identiteter i a-erne, da disse er uafhængige. En bestemt Frembringer skal altsaa i en bestemt af disse Ligninger (5) have samme Eksponentsum paa begge Sider af Lighedstegnet. Derved faar vi de n^2 Ligninger:

$$\delta_{i1} d_{1l} + \delta_{i2} d_{2l} + \cdots + \delta_{in} d_{nl} = \begin{cases} 0 \text{ for } i \neq l \\ 1 \text{ for } i = l \end{cases} \tag{6}$$

Og disse Ligninger (6) er jo Udtryk for, at n lineære, ikke homogene Ligninger i n Ubestemte med de hele Tal d_{ik} som Koefficienter har et Løsningssystem med de hele Tal δ_{ik} som Koefficienter; men da skal man jo have $|d_{ik}| = \pm$ 1. — Denne Sammenhæng kan fremstilles endnu mere haandgribelig, naar man husker paa, at a-erne jo kan betyde hvilketsomhelst, og man saa vælger dem som saadanne Ting, hvis Komposition er kommutativ. Lad os f. Eks. vælge a-erne som positive Tal. Vi faar saa ved at ombytte Faktorerne:

$$\alpha_i = a_1^{d_{i1}} a_2^{d_{i2}} \cdots a_n^{d_{in}} \tag{7}$$

$$a_i = \alpha_1^{\delta_{i1}} \alpha_2^{\delta_{i2}} \cdots \alpha_n^{\delta_{in}} \tag{8}$$

og ved at tage Logaritmerne og betegne disse med de tilsvarende store Bogstaver:

$$\mathrm{A}_i = d_{i1} A_1 + d_{i2} A_2 + \cdots + d_{in} A_n \tag{7 a}$$
$$A_i = \delta_{i1} \mathrm{A}_1 + \delta_{i2} \mathrm{A}_2 + \cdots + \delta_{in} \mathrm{A}_n \tag{8 a}$$

Dette sidste System af n lineære Ligninger og deres inverse, der gælder for vilkaarlige Værdier $A_1, A_2, \cdots, A_n$, viser, at $|d_{ik}| = \pm 1$. Indenfor det kommutative Omraade er (6) den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for den samtidige Bestaaen af (7) og (8), eller (7 a) og (8 a), indenfor det ikke-kommutative Omraade derimod kun en nødvendig Betingelse for den samtidige Bestaaen af (3) og (4). Denne Betragtning viser, at Sætningen $|d_{ik}| = \pm 1$ ikke er nogen dybere Sætning i Regningen med ikke-kommutative Elementer, da den i Grunden ikke har med Regningens ikke-kommutative Karakter at gøre. Vi har jo kunnet bevise den alene ved at benytte den Omstændighed, at det ikke-kommutative Omraade omfatter det kommutative, en Omstændighed, man altid med Fordel kan benytte som Kontrol og for at finde nødvendige Betingelser ved Regning med ikke-kommutative Elementer.

§ 5. Ækvivalente reducerede Systemer.

En Systemklasse, d. v. s. Samlingen af alle med et givet System og derfor med hverandre ækvivalente Systemer, vil i Almindelighed indeholde flere reducerede Systemer. Lad $S = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ og $T = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ være to ækvivalente reducerede Systemer. Vi har altsaa

$$\beta_i = \Pi^{(i)}(\alpha_j^{\pm 1}) \tag{9}$$

men ogsaa $$\alpha_i = \psi^{(i)}(\beta_j^{\pm 1}) = \psi^{(i)}\left(\Pi^{(j)}(\alpha_k^{\pm 1})^{\pm 1}\right) \tag{10}$$

(10) er en Identitet i α-erne for alle Værdier af i. Ser vi saa et Øjeblik helt bort fra, at α-erne og β-erne er Produkter af de oprindelige Frembringere a, og opfatter α-erne som Frembringere til en fri Gruppe G_m, ses T at være et Primitivsystem i α-erne. Deraf følger $p \geqq m$. Ved at ombytte Systemernes Rolle har man $m \geqq p$, altsaa $m = p$:

Sætning 4: Alle reducerede Systemer af samme Klasse har samme Elementantal. — Vi vil kalde det »Klassens Grundtal«.

I Forbindelse med Sætningerne 2 og 3 ses nu umiddelbart:

Sætning 5: Et uafhængigt Systems Elementantal er Minimum indenfor dets Klasse, lig Klassens Grundtal; og hvert System i Klassen med dette Elementantal er uafhængigt.

Er altsaa et System afhængigt, da vil ethvert dermed ækvivalent System med samme eller større Elementantal ligeledes være afhængigt.

Vi vil se nærmere paa Forholdet mellem de to ovennævnte reducerede Systemer S og T. Overgangen fra S til T er altsaa en isomorf Transformation i α-erne og omvendt. Lad d_{ik} være den algebraiske Sum af α_k's Eksponenter i β_i. Vi ved, at $|d_{ik}| = \pm 1$. Altsaa skal mindst eet af denne Determinants Led være $\neq 0$. Vi vælger et bestemt Led af denne Art. Det har m Faktorer, som alle er $\neq 0$ og fordeler sig paa alle Determinantens Rækker og ligeledes paa alle dens Søjler. Dette Led bestemmer altsaa en enentydig Parring mellem Determinantens Rækker og Søjler, altsaa mellem Elementerne i T og S af den Art, at ethvert af S' Elementer forekommer som Faktor i det dermed korresponderende Element af T. Da Systemernes Egenskaber jo er uafhængige af Elementernes Orden, kan vi tænke os Indekstallene i S og T fordelt saaledes, at α_i korresponderer med β_i, altsaa er Faktor i β_i. Det ses let, at et vilkaarligt Produkt af et reduceret Systems Elementer har mindst ligesaa stort g-Tal som hver af dets Faktorer. Vi har altsaa

$$g(\beta_i) \geqq g(\alpha_i) \qquad (11)$$

Her har vi nu ikke paa Forhaand Ret til at ombytte Systemernes Rolle, da vi ikke ved, om den samme Parring kan bruges for Frembringelsen af S ved T. Men vi kan slutte:

$$\sum_{i=1}^{m} g(\beta_i) \geqq \sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$$

Og da vi her har Ret til at ombytte Systemernes Rolle, følger

$$\sum_{i=1}^{m} g(\beta_i) = \sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$$

altsaa i Forbindelse med (11)

$$g(\beta_i) = g(\alpha_i).$$

Sætning 6: Ækvivalente reducerede Systemer har samme g-Tal og samme Fordeling af dette paa de enkelte Elementers g-Tal.

Da der kun findes et endeligt Antal Systemer med samme g-Tal, faas herved

Sætning 7: Hver Systemklasse indeholder kun et endeligt Antal af reducerede Systemer.

Læseren vil ved Hjælp af de reducerede Systemers Grundegenskaber til et forelagt reduceret System let kunne konstruere de dermed ækvivalente reducerede Systemer i et endeligt (og i Almindelighed lille) Antal Skridt.

De reducerede Systemer i en Klasse udmærker sig fremfor de andre uafhængige Systemer i Klassen egentlig kun ved den praktiske Betydning de har, naar det gælder at løse et forelagt Frembringelsesproblem, som i § 3. Med Hensyn til en Undergruppes Frembringelse skal vi anse alle uafhængige Systemer for lige gode. Af de ovennævnte Klasseinvarianter m, $\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$ og Talsystemet $g(\alpha_1), g(\alpha_2), \cdots, g(\alpha_m)$ er altsaa den første, Klassens Grundtal, den der har den egentlige systematiske Betydning. Ved Etableringen af den isomorfe Sammenhæng mellem S og T i denne § benyttede vi os kun af, at begge Systemer var uafhængige og ækvivalente, ikke af deres specielle Egenskab som reducerede Systemer. Vi har da dette Resultat:

Sætning 8: Kender man en given Gruppes Frembringelse ved et uafhængigt Elementsystem, findes alle andre Frembringelser ved uafhængige Elementsystemer ved Hjælp af alle mulige isomorfe Transformationer anvendte paa det første Systems Elementer.

En given Gruppes Fremstilling som fri Gruppe er altsaa, hvis den er mulig, bestemt paa en isomorf Transformation nær. Disses Antal er uendeligt, men man kan bestemme dem alle ad systematisk Vej ved at gaa ud fra et passende endeligt Sæt iblandt dem og kombinere disse[1]).

[1]) Se Math. Annalen 79, Side 271—272.

Almindelige Bemærkninger om Anvendelsen i Gruppeteorien.

For at karakterisere de forestaaende Undersøgelsers Betydning for Gruppeteorien rigtigt, skal man fremhæve, at den finder sin Begrænsning ved, at disse Metoder kun er tilstrækkelige til en Gruppes Behandling, naar denne kan fremstilles som fri Gruppe. Dette er for de almindelige diskontinuerte Gruppers Vedkommende kun det simpleste Tilfælde. De almindelige diskontinuerte Gruppers Teori i det særlig interessante Tilfælde, at de er uendelige, men kan frembringes ved et endeligt Antal af Elementer, er i nyere Tid særlig bleven behandlet af M. Dehn[1]). Den karakteristiske Vanskelighed, disse Undersøgelser frembyder i Sammenligning med de her gennemførte, ligger i følgende:

Lad $A = a_1, a_2, \cdots, a_n$ igen være et Frembringersystem til en Gruppe G, hvis Elementer altsaa gives som Produkter af a-erne. Forskellen ligger nu i Elementernes Identificering. Der antages at være givet et System af Elementer $R_1, R_2, \cdots, R_m$, som ikke er 1 i den hidindtil betragtede Gruppe G_n, d. v. s. ikke ved Forkortning i a-erne viser sig at være lig med 1, men som ved Definition fastsættes til at være 1 i G. Disse Relationer $R_i = 1$, der altsaa ikke er Identiteter i a-erne, kaldes de »definerende Relationer«. Det vil nu være tilladt at stryge Komplekset R_i af Frembringere, hvorsomhelst det forekommer i denne Rækkefølge i et Element, og ligeledes at indføje det efter Forgodtbefindende. Elementernes Udtryk i Frembringerne bliver derved i høj Grad ubestemt. Saaledes vil Gruppeelementet 1 ikke alene kunne skrives $\Pi(a_i^{\pm 1})$, hvor dette er lig 1 identisk i a-erne; men ogsaa f. Eks. $\Pi(R_i^{\pm 1})$, hvor dette Produkt ikke kan bortforkortes helt i R-erne og heller ikke i a-erne. Men den egentlige Vanskelighed ligger i følgende: $\Phi R_i \Phi^{-1}$ vil jo ogsaa være 1, naar Φ er et vilkaarligt Element; derfor vil ogsaa ethvert Produkt $\Pi(\Phi R_i^{\pm 1} \Phi^{-1})$ med vilkaarlig mange Faktorer og vilkaarligt Valg af Φ i hver Faktor være 1. Gruppens Definition sker nu ved, at der fastsættes, at et Element skal være lig 1, naar og kun naar det kan skrives paa denne Form $\Pi(\Phi R_i^{\pm 1} \Phi^{-1})$. Dehn synes at være den første, der klart har fremhævet, at dette logisk hører med til Gruppens Definition. Dermed er det prin-

[1]) Af en Række Afhandlinger af M. Dehn om dette Emne skal her særlig fremhæves: »Über unendliche diskontinuierliche Gruppen« i Math. Ann. 71.

cipielt afgjort, om to Produkter P og Q i Frembringerne betyder det samme Element i G: Det er Tilfældet, naar og kun naar der eksisterer en i a-erne identisk Ligning

$$PQ^{-1} = \Pi(\Phi R_i^{\pm 1} \Phi^{-1})$$

Men samtidig opstaar Problemet, at træffe en Afgørelse i et endeligt Antal Skridt om, hvorvidt en saadan Fremstilling eksisterer eller ikke, naar P, Q og $R_1, \cdots, R_m$ gives ved deres Udtryk i a-erne. Dette »Identitetsproblem«, som Dehn har kaldt det, er altsaa en Udvidelse af det i § 3 omhandlede »Frembringelsesproblem«, men dets almindelige Løsning har hidindtil frembudt uovervindelige Vanskeligheder. Forholdet mellem disse to Problemer kan passende erkendes ved, at man sammenligner den her i § 3 fremstillede Metode med de Løsninger, man kender for Identitetsproblemet i specielle Tilfælde[1]), og den grafiske Behandling af Identitetsproblemet, man kommer til ved at anvende det af Dehn indførte »Gruppebillede«[2]). Mens man ved Løsningen af Frembringelsesproblemet sætter Elementerne i Række paa alle mulige Maader — man kunde tale om et »lineært« Problem — fremstiller man i Gruppebilledet Elementerne R_i ved Polygoner og sætter disse ved Behandling af Identitetsproblemet sammen i en Plan. Dette sidste Problem har altsaa, med et Udtryk af Dehn, »en Dimension mere« end det første. Om dette er en virkelig eller kun en tilsyneladende Rangforskel, med andre Ord, om det kan lykkes, ud fra Systemet $R_1, R_2, \cdots, R_m$ at konstruere et andet endeligt System, der tillader at føre et forelagt Identitetsproblem tilbage til et Frembringelsesproblem, staar uafgjort.

---

[1]) Smlg. f. Eks. M. Dehn: »Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen« i Math. Ann. 72.

[2]) Se M. Dehn: »Über die Topologie der dreidimensionalen Raumes« i Math. Ann. 69, særlig Side 140 ff.